Μάθημα 4ο: 27/03/2020

→ Θα ανεβαίνει στο e-course ότι κάνουμε στο μάθημα
→ Θα ανεβαίνει στο e-course ο «Πίνακας-Εξ-Αποστάσεως»

$$e^{i(a+\beta)} = \cos(a+\beta) + i\sin(a+\beta)$$
$$= \cos a\cos\beta - \sin a\sin\beta + i(\sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta)$$
$$= (\cos a + i\sin a)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= e^{ia}\cdot e^{i\beta}$$

Δηλαδή $\boxed{e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1}e^{iy_2}, \quad y_1, y_2 \in R}$ ①

• Η ιδιότητα ① που ισχύει στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει την ιδιότητα αυτή για την εκθετική συνάρτηση στο R:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}, \quad x_1, x_2 \in R$$

• Η ιδιότητα αυτή ικανοποιείται και για τους φανταστικούς.

⇒ Επαγωγικά συνεπάγεται: ο τύπος de Moivre:

② $\boxed{e^{iny} = (e^{iy})^n}, \quad y \in R, \quad n \in \mathbb{N}$

• Η ② ισχύει και για $n=0$, δηλαδή:

$$1 = e^{i0} = e^{i(y-y)} = e^{iy}\cdot e^{-iy} \overset{*}{\Leftrightarrow}$$

[αφού $e^{i(y-y)} = e^{i(y+(-y))} = e^{iy}e^{-iy}$]

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} e^{-iy} = \frac{1}{e^{iy}} = (e^{iy})^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Έτσι έχουμε ορίσει τον αντίστροφο του e^{iy} που είναι το $\boxed{e^{-iy}}$.

- $e^{i(-m)y} = e^{-imy} = (e^{imy})^{-1} \underset{\text{Moivre}}{\overset{\text{Τύπος de}}{=}} ((e^{iy})^m)^{-1} = (e^{iy})^{-m}$

όπου $y \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ισοΣ με

$$\boxed{\exp z : e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

με $x, y \in \mathbb{R}$ και $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ονομάζεται

<u>Εκθετική συνάρτηση</u>.

<u>Ιδιότητες της εκθετικής</u>:

① $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x > 0$

② $e^{x+i0} = e^x e^{i0} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

[η εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ είναι επέκταση της εκθετικής στο $\mathbb{R}$]

③ Αν $z = x+iy \in \mathbb{C}$ και $w = a+ib \in \mathbb{C}$ <u>τότε</u>:

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+a+i(y+b)} \\ &= e^{x+a} e^{i(y+b)} \\ &= e^x e^a e^{iy} e^{ib} \\ &= e^x e^{iy} e^a e^{ib} \\ &= e^z e^w \end{aligned}$$

Άρα $\boxed{e^{z+w} = e^z e^w}$, $z, w \in \mathbb{C}$.

④ $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$, $z \in \mathbb{C}$

⑤ $e^{nz} = (e^{z})^{n} \quad , z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$

⑥ $e^{z-w} = \dfrac{e^{z}}{e^{w}} \quad , z, w \in \mathbb{C}$

⑦ $\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}} \quad , z \in \mathbb{C}$ SOS

⑧ $e^{z+2k\pi i} = e^{z} \quad , z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ SOS

ΠΟΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Καθώς κάθε μιγαδικός $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ αντιστοιχεί μοναδικά, μέσω της αλγεβρικής παράστασης $z = x + iy$ σε ένα διάνυσμα $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ προκύπτει ότι κάθε μιγαδικός z γράφεται μοναδικά στην μορφή:

$$z = x + iy$$
$$z = r\cos\phi + ir\sin\phi$$
$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$\boxed{z = r e^{i\phi}}$$

όπου $(r, \phi) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ και $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\boxed{z = r e^{i\phi} = r e^{i(\phi + 2k\pi)}}$$

→ Το σύνολο $\arg z = \phi + 2k\pi$ ονομάζεται <u>όρισμα</u> του $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

→ $\operatorname{Arg} z = \phi$ ονομάζεται <u>κύριο όρισμα</u> του $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και είναι <u>μοναδικό</u> για κάθε z και <u>$\phi \in (-\pi, \pi]$</u>

- $e^{i\phi} = e^{i\varphi}$ όπου $\phi, \varphi \in R$

$$\frac{e^{i\phi}}{e^{i\varphi}} = 1$$

$$e^{i\phi - i\varphi} = 1$$

$$e^{i(\phi-\varphi)} = 1$$

$\Leftrightarrow \cos(\phi-\varphi) = 1$ και $\sin(\phi-\varphi) = 0$

$\Leftrightarrow \phi - \varphi = 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \phi - \varphi = 0$ για $\phi, \varphi \in (-\pi, \pi]$

$\Rightarrow \phi - \varphi \in (-2\pi, 2\pi]$

SOS
- $e^{i\theta} = 1, \ \theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \theta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

SOS
- $e^{i\theta} = 1, \ \theta \in (-\pi, \pi] \Leftrightarrow \theta = 0$.

→ <u>Σχόλιο</u>: Για $z=0$ δεν μπορούμε να ορίσουμε όρισμα αφού το αντίστοιχο διάνυσμα δεν έχει μήκος.

<u>Άλλη γραφή του z είναι</u>:

$$z = r e^{i\phi}$$
$$= |z| e^{i \arg z}$$
$$= |z| e^{i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)}$$
$$= |z| \cdot e^{i\phi}$$
$$\boxed{z = |z| \cdot e^{i\phi}} \qquad \phi \in (-\pi, \pi]$$

SOS
- $z = r \cdot e^{i\phi}$, $r>0$ και $\phi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \phi = \arg z$.

SOS
- $z = r \cdot e^{i\phi}$, $r>0$ και $\phi \in (-\pi, \pi] \Leftrightarrow \phi = \operatorname{Arg} z$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Για $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- $z_1 = z_2 \iff |z_1| e^{i\arg z_1} = |z_2| e^{i\arg z_2}$
  $\iff |z_1| = |z_2|$ **και** $\arg z_1 = \arg z_2 \iff \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$

- $z_1 z_2 = |z_1| e^{i\arg z_1} \, |z_2| e^{i\arg z_2}$
  $= |z_1| |z_2| e^{i\arg z_1} e^{i\arg z_2}$
  $= |z_1| |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$
  $= |z_1 \cdot z_2| e^{i(\arg z_1 z_2)}$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| e^{i\arg \frac{z_1}{z_2}}$

- $z^n = (|z| e^{i\arg z})^n$
  $= |z|^n e^{in\arg z}$
  $= |z^n| e^{i\arg(z^n)}$, $z \in \mathbb{C}$ ίσος , $n \in \mathbb{Z}$

→ Ως ΑΣΚΗΣΗ Η απόδειξη του $\dfrac{z_1}{z_2}$.

→ Να διαβάσουμε τα: π.χ. 1.2.1 / σελ 20
π.χ. 1.2.2 / σελ 22

→ Η.W A.9 , A.10 , A.11 μόνο το α , A.12 (de Moivre),
A.13 (SOS), A.14 (SOS), A.15 (εξάσκηση), A.16 (εξάσκηση)
A.17 (όχι SOS, αν θέλουμε την λύνουμε)

ΡΙΖΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

(Α) Επίλυση της $z^n = w$ και η συνάρτηση n-οστής ρίζας

Έστω $w \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}$. Θέλουμε να βρούμε τις ρίζες του w δηλαδή όλους τους μιγαδικούς $\sqrt[n]{w}$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$z^n = w$$

• Αν $w = 0$ τότε

$$z^n = w = 0 \Leftrightarrow |z^n| = |z|^n = |w| = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

• Αν $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ τότε:

$$w = r \cdot e^{i\theta}, \quad r = |w| > 0, \quad \theta = \arg w$$

$$z = \rho \cdot e^{i\phi}, \quad \rho = |z| > 0, \quad \phi = \arg z$$

Άρα $z^n = w$ θα είναι:

$$(\rho e^{i\phi})^n = r e^{i\theta}$$

$$\rho^n e^{in\phi} = r e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \rho^n = r \quad \text{και} \quad n\phi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{και} \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Άρα:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Ορισμός

Η συνάρτηση της n-οστής ρίζας :

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \sqrt[n]{\mathbb{C}} = \{0\} \cup \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi/n < \operatorname{Arg} w \leq \pi/n\}$$

είναι "1-1" και επί.

Παρατήρηση

$$z_k = \sqrt[n]{w} \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Ειδικά για $n = 2$: $e^{i\pi} = -1$

Άρα $z^2 = w \iff z = \pm\sqrt{w}$, $w, z \in \mathbb{C}$.

→ Ως ΑΣΚΗΣΗ : π.χ. 1.3.1 | σ. 96

π.χ. 1.3.2 | σελ. 97

π.χ. 1.3.3 | σελ. 97

ΠΡΟΣΟΧΗ π.χ. 1.3.4 | σελ. 97

ΠΡΟΣΟΧΗ π.χ. 1.3.6 | σελ. 97